Montenegro, Budva, Becici 2 — 8 October 2016 (Europe/Podgorica) Hotel Splendid, Conference Hall



### Maximally Supersymmetric Gauge Theories: New Theoretical Playground

#### **Dmitri Kazakov**

in collaboration with L. Bork, A. Borlakov, M. Kompaniets,

**D.Tolkachev and D.Vlasenko** 





<u>Maximal SYM</u> Theories in D-dimensions where maximal possible number of super symmetries in realized

<b>D=</b> 4	N=4
<b>D=6</b>	N=2
<b>D=8</b>	N=1
D=10 N=1	

- It is believed that these theories possess distinguished properties:
- integrability,
- exact solutions,
- can provide break through into non-perturbative phenomena,
- can solve the problem of UV divergences in quantum gravity









#### **D=4 N=8 Supergravity**





**D=4 N=8 Supergravity** 

On-shell finite up to 8 loops
 Similar to higher dim SYM





**D=4 N=8 Supergravity** 

On-shell finite up to 8 loops
 Similar to higher dim SYM

Study of higher dim SYM gives insight into quantum gravity





#### **<u>Object</u>: Helicity Amplitudes on mass shell** with arbitrary number of legs and loops

The case: Planar limit

$$N_c \to \infty, g_{YM}^2 \to 0 \text{ and } g_{YM}^2 N_c$$
 - fixed

The aim: to get all loop (exact) result



## New approach to gauge theories

### Spinor-helicity formalism: S-matrix elements

Any light-like vector  $p_{(i)}^2 = 0$  can be presented in the form  $p^{(i)}_{\mu} \mapsto (\sigma^{\mu})_{\alpha \dot{\alpha}} p^{(i)}_{\mu} = \lambda^{(i)}_{\alpha} \tilde{\lambda}^{(i)}_{\dot{\alpha}} \qquad \lambda_{\alpha} \in SL(2, \mathbb{C})$ Rev. in BernDixonKosower 96  $\epsilon^{\alpha\beta}\lambda^{(i)}_{\alpha}\lambda^{(j)}_{\beta} \equiv \langle ij\rangle = \sqrt{(p_i + p_j)^2}e^{i\phi_{ij}} = \sqrt{s_{ij}}e^{i\phi_{ij}}, \ \phi_{ij} \in \mathbb{R} \quad (\langle ij\rangle)^* \equiv [ij]$ Solutions to massless Dirac equation **Polarization vectors**  $\epsilon^+_{\mu}(p) \mapsto \epsilon^+_{\alpha\dot{\alpha}}(p) = \frac{\lambda^k_{\alpha}\dot{\lambda}^p_{\dot{\alpha}}}{\sqrt{2}\langle kn\rangle} \qquad \epsilon^-_{\mu}(p) \mapsto \epsilon^-_{\alpha\dot{\alpha}}(p) = \frac{\lambda^p_{\alpha}\tilde{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}}{\sqrt{2}[kn]}$ Amplitudes 000000  $A_3(g_1^-g_1^-g_3^+) \sim \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}$ **Classification** \_\_\_\_\_ →\_\_\_\_  $\begin{array}{c} & & \\ & \pm \\ & - \end{array} \quad A_3(g_1^+ g_1^+ g_3^-) \sim \frac{[12]^4}{[12][23][31]} & \text{MHV}_n = \lambda_{tot} = n - 4 \\ & \\ & \text{N}^k \text{MHV}_n = \lambda_{tot} = n - 2k \end{array}$  $p_i \in \mathbb{C}$ 

There is no need in Faddeev-Popov ghosts, gauge fixing, BRST, Batalin-Vilkovistsky formalism,etc in this approach!



## **Tree-level example: Five gluons**

Force carriers in QCD are gluons. Similar to photons of QED except they self interact.

**Consider the five-gluon amplitude:** 



**Used in calculation of**  $pp \rightarrow 3$  **jets at CERN** 

If you evaluate this following textbook Feynman rules you find... <sup>7</sup>



# Result of evaluation (actually only a small part of it):

ge and and an extension of the set والمراجع والم 小麦 "你我,你我,你我,你 我不知道,我我,你我,你我不知道,你我们我们,我们不能是不能不能吗?""你你,你你不能是你?""你你,你你?""你……" ang ang pang ang pang ang tanang ang pang ang pang ang ang ang ang ang ang pang ang pang ang pang ang tanang an ويتواليهم والمراجع و արակ շարկել որ ել ուրալ ուս, արակ շարել շարել շարել ուս արել շարել շարել ուս արել ուս արել ուս ել ենքի ուս արել շարել 人名法法法 法法法法 医结子的 医结子的 化结子的 化化合子的 化化合子的 化化合子的 化化合物 化化合物 化化合物 化化合物 化化合物 化化合物 الأبية يشبقه وتكافر

ապել սարել, որել, այնը ուղել, որել, այնը արել, որել, որե 和我,我们,我们,我们们的这一样,我们,我们的这些你,我的你?""你们,我们不能做了你的事儿?""你们,你们不能做你的吗?""你是……""你们,你们,我们不是 المتراجعها والمراجع المنها ويهون المرقي المرقي ويرابق المروح والمرقي والمرقي والمرقية فالمراجع والمرقية والمرقية والمرقية والمرقية والمرقي و ավել պահանձանը անչեր անչ անի արդեր արդեր արդեր արել որ ենչ որ եր ուրեր որ մենլ անդեր մինս տեսեւ տել մենլ անդեր հետ հետ մ 和我,agay and and a set a description and and a set and a set a s 春秋·南山山的山脉、山脉、山水、山水、山水、山水、南方、南千秋·北南、山水、南东南、南南、南东西南南、南东西南南、南南、南南、南南 անց ենչեր ներել երելու է, – ել հարց երելել ել երեզ և էլ երել երել է երել ենչել ենչել են երել երել երել երել երե البله وابتك يتكاثر

```
医骨上的 网络小麦属小麦属小麦属小麦属 医子宫周期 网络小麦属小麦属小麦属小麦属小麦属小麦属小麦属小麦属小麦属
ապերութերութեր արերարդությունը հեղեր որել որել որել հերել որեկ հեղելու է հերուցել որել երարդություններութերութե
·本語,我自己的語:我們是一個是,我是,我是,我是一個人一個一個人的是,我是一個人一個人一點,我的一個人的時代的一個的,我的一個人。$P$
来后:"你们,你们,你们,你没有我了你们,你你们,你不会,你我们我你,你你?你你你?"你不是,你们,你们,你们,你们,你们,你们,你们,你们,你
المراجع والمراجع والم
المراجع والمراجع والمراجع
المراجع والمراجع والمراجع
المراجع والمراجع والمراجع
All the shell shell a
```

يه التوجيحية منهان موالي مراجع ومراجع ومراجع والترجي والترجي والترجي والترجي والمراجع سان مورد در این می از این می از این می از مینو در ایر در مار در این می و در این می از در این در این در ای در ای مراجع مراجع ایر می این می این می و در ایر در ایر در ایر در ایر می و در ایر می و در ایر می و در ایر می و در ایر م والمراجع و والمراجع و անը արել արել որել որ ու եւ արել արել որել որել որել արել արել որու ու ուել որել որել որել որել որել որել որու Հայ سان المان المراجع والمراجع անությունը չայնը չայնը չայս են արդությունը, որնը, որ ներ արդությանը չայնը չա անի անձառերը՝ անձան այն պետ տեղել անձառել եր պարությել այն պետ հետ տեղել որ եր տեղել եր տեղել անձառել եր եր էր المعرفين والمحاربة و المريح والمريح و اللار موقع مراجع مراجع معرفة محافظ محافظ مراجع والمحافظ والمحافظ والمحافظ والمحافظ والمحافظ والمحاف والمحاف المركب المركب والمركبة والم الاستر موالي - والف المراجع الله معلى المراج المراج المراجع الم الخارقين يشترو

անվեր սարող անդես են, են եր սնցել սեղենը մեն, է է, սեղել լենքը սարել եր տարել սարել ուց է որ սերեւ օրտել եր (վերել սեղ) ستراسين سيشر ويتبع ويقدر والمرجوع سيقد ويترقع مريس والمرجو والمرجوع سان الهام المان المان المان المان المان المان المان المان المان الماني الماني الماني الماني الماني الماني المان المراجع المراجع المراجع والمراجع ամբ շրջեւ որոշ չերել եր – եր որոեր որոշ արել, եր – եւ -եւ էլ է երել ունել, որ – ել է այնը է երել, երել, երել չարել օրեւ են - ور میگو دوگر دول می اور دول دول و دول و دول میگود. می میگو میگو میگو میگو دول دول دول دول دول دول میگو دول د ه دو دوران دوران دوران دور سان دوران دور – եր շարեր որբեր արել ուր է եւ շերել ուրեր որբեր շերեր, որեր ուրեր շարեր եր է երել էրեր չերեր չերեր ուրեր որբեր ت اور دوران دوران در اور در او در مراجع در اور در او بعاقبه مهديه وتعاقبه والارتحاق والمراجع و - گې - يا شي خونې د ولو د چې - کې خونې خونې خونې خونې د ولو ությունը է անդերացել ու ու անդերաներ անդերաներ են է ու երանդերացին տատրանը ու երանդերացին, արդերացի են երանդեր المقرب مرغو المرغور والمعرفين والمرغور والمرغور والمرغون والمرغور وال المراجع والمراجع ت خر - در ش - شرقه - مرقع - مر - غر - د. این - د. این میشر - در - در تاله میش - فرقه - در این - در ش - در ش - مرقم - مرقم - در ش مر ամությանը որը երազաների միլ անել ուղենցի ուղենցի որը անել ուղենցի ուղենցի որընցին ուղենցի հետել, որընցի հետ անե Հայտնությունը հետելու հետելու հետելու հետելու հետելու հետելու հետելու հետելու հետել, որընցի հետելու հետելու հետե ուց շարել որ երացել շար է ուրել, որել ուրել, որ է որել, որել որել, որել ուրել ուրել որել, որել որել երել երել որ - قو مقرقو موجو موقع مو - قو مد الد موجو مقولو - قو موقع موقع من المراجع موجود المراجع موجو مقولو - قو مع مقولو - قو م ունը այնը այնը տեղել այս եր ուղելը ուրեր արել ուրեր այս եր ուղեր արել ուղեր արել ուղեր երեր ակել այս տեղերեր երեր المريح ويرقو مرقو بالمريح والمريح والم ուն, որել, ուներանները է ուներաներին, որել է ներաններին, որել է եներաններին, որել է եներաններությանը հետև երելո ությունը՝ ոչեր արել որ ուղերել ուրել ուրել որ երակությանը արել ուղել ու երանցակել որել որել որել որել որել որել ուղ աղելութել անել անել են, որ ել այել այել որ ել ուղեն աղել արել որ ել որ ել այել այել այել որ ել ուղել որ ել المقدوفية والإلار

ան (Հայ պատգեստերել տարերացի անդերի անդերությունը, որ երկրությունը երկրությեն, տեղել ուղեն կատերի անդերիների եր Հայ հետ պետել ուղեն ուղեցի ուղ անդեր անդերությունը, ուղեն անդեր ուղեցի ուղեցի ուղեցին, ուղեցին, ուղեցի ուղեցինե Հայ հետ պետել անդեր ուղեցի ուղեցի ուղեցի ուղեցին, ուղեցի անդեր ուղեցի երկրությեն, ուղեցի ուղեցի անդերինեն, հետ է

> Messy combination of momenta and gluon polarization vectors.

```
k_1 \cdot k_4 \,\varepsilon_2 \cdot k_1 \,\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 \,\varepsilon_4 \cdot \varepsilon_5
```



#### **Reconsider Five-Gluon Tree**



Xu, Zhang and Chang and many others

$$A_{5}^{\text{tree}}(1^{\pm}, 2^{+}, 3^{+}, 4^{+}, 5^{+}) = 0$$

$$A_{5}^{\text{tree}}(1^{-}, 2^{-}, 3^{+}, 4^{+}, 5^{+}) = i \frac{\langle 12 \rangle^{4}}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 51 \rangle}$$

$$A_{5}^{\text{tree}}(1^{-}, 2^{+}, 3^{-}, 4^{+}, 5^{+}) = i \frac{\langle 13 \rangle^{4}}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 51 \rangle}$$

Use a better organization of color charges:

With a little Chinese magic, i.e. helicity states:

$$\mathcal{A}_{5} = \sum_{\text{perms}} \text{Tr}(T^{a_{1}}T^{a_{2}}T^{a_{3}}T^{a_{4}}T^{a_{5}}) A_{5}(1, 2, 3, 4, 5)$$

Motivated by the color organization of open string amplitudes. Mangano and Parke

9



#### Recent progress in multi-leg FD calculations





### Recent progress in multi-leg FD calculations





# UV divergences in all Loops

- D=4 N=4 No UV div IR div on shell
- D=6 N=2 UV div from 3 loops No IR div
- D=8 N=1 UV div from 1 loop No IR div
- D=10 N=1 UV div from 1 loop No IR div

All these theories are non-renormalizable by power counting

The coupling 
$$g^2$$
 has dimension  $[g^2] = rac{1}{M^{D-4}}$ 

The aim: to get all loop (exact) result for the leading (at least) divs



## **Colour decomposition**

#### **Colour ordered amplitude**

$$\mathcal{A}_{n}^{a_{1}...a_{n}}(p_{1}^{\lambda_{1}}...p_{n}^{\lambda_{n}}) = \sum_{\sigma \in S_{n}/Z_{n}} Tr[\sigma(T^{a_{1}}...T^{a_{n}})]A_{n}(\sigma(p_{1}^{\lambda_{1}}...p_{n}^{\lambda_{n}})) + \mathcal{O}(1/N_{c})$$
Planar Limit  $N_{c} \to \infty, g_{YM}^{2} \to 0$  and  $g_{YM}^{2}N_{c}$  - fixed
This is what we calculate

### Four-point amplitude

 $A_4^{(l),phys} \cdot (1,2,3,4) = T^1 A_4^{(0)}(1,2,3,4) M^{(l)}(s,t) + T^2 A_4^{(0)}(1,2,4,3) M^{(l)}(s,u) + T^3 A_4^{(0)}(1,4,2,3) M^{(l)}(t,u).$ 

$$\begin{split} & T^{1} = Tr(T^{a1}T^{a2}T^{a3}T^{a4}) + Tr(T^{a1}T^{a4}T^{a3}T^{a2}), \\ & T^{2} = Tr(T^{a1}T^{a2}T^{a4}T^{a3}) + Tr(T^{a1}T^{a3}T^{a4}T^{a2}), \\ & T^{3} = Tr(T^{a1}T^{a4}T^{a2}T^{a3}) + Tr(T^{a1}T^{a3}T^{a2}T^{a4}) \end{split}$$

Tree level amplitude usually has a simple universal form proportional to the delta function (conservation of momenta), in SUSY case - conservation of supercharge in on shell momentum superspace



### Perturbation Expansion for the Amplitudes for any D



S.Caron-Huot D.O'Connell 10

Universal expansion for any D in maximal SYM due to Dual conformal invariance



### Perturbation Expansion for the Amplitudes for any D



Universal expansion for any D in maximal SYM due to Dual conformal invariance



#### Leading Divergences from Generalized «Renormalization Group»

• In renormalizable theories the leading divergences can be found from the 1-loop term due to the renormalization group, in particular, for a single coupling theory the coefficient of  $1/\epsilon^n$  in n loops in given by  $a^{(n)} - (a^{(1)})^n$ 

$$a_n^{(n)} = (a_1^{(1)})^n$$



#### Leading Divergences from Generalized «Renormalization Group»

- In renormalizable theories the leading divergences can be found from the 1-loop term due to the renormalization group, in particular, for a single coupling theory the coefficient of  $1/\epsilon^n$  in n loops in given by  $a_n^{(n)} = (a_1^{(1)})^n$
- In non-renormalizable theories the leading divergences can be also found from 1-loop due to locality and R-operation

$$\mathcal{R}'G = 1 - \sum_{\gamma} K\mathcal{R}'_{\gamma} + \sum_{\gamma,\gamma'} K\mathcal{R}'_{\gamma} K\mathcal{R}'_{\gamma'} - \dots,$$



#### Leading Divergences from Generalized «Renormalization Group»

- In renormalizable theories the leading divergences can be found from the 1-loop term due to the renormalization group, in particular, for a single coupling theory the coefficient of  $1/\epsilon^n$  in n loops in given by  $a_n^{(n)} = (a_1^{(1)})^n$
- In non-renormalizable theories the leading divergences can be also found from 1-loop due to locality and R-operation

$$\begin{split} \mathcal{R}'G &= 1 - \sum_{\gamma} K \mathcal{R}'_{\gamma} + \sum_{\gamma,\gamma'} K \mathcal{R}'_{\gamma'} K \mathcal{R}'_{\gamma'} - ..., \\ \mathcal{R}'G_n &= -\frac{A_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^n} + \frac{A_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^n} + ... + \frac{A_1^{(n)}(\mu^2)^{\epsilon}}{\epsilon^n} \\ \text{eading pole} &+ \frac{B_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^{n-1}} + \frac{B_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^{n-1}} + ... + \frac{B_1^{(n)}(\mu^2)^{\epsilon}}{\epsilon^{n-1}} \\ &+ \text{lower order terms} \\ \text{SubLeading pole} & A_1^{(n)}, B_1^{(n)} & \text{1-loop graph} \\ B_2^{(n)} & \text{2-loop graph} \end{split}$$



D=8 N=1 Horizontal boxes



13



**D=8 N=1** 

### **R-operation and Recurrence Relation**

#### Horizontal boxes





**D=8 N=1** 

### **R-operation and Recurrence Relation**

#### Horizontal boxes



#### D=6 N=2

**Result up to 5 loops** 

#### **Leading Divergences**

$$L.P. = 2stg^4 \left[ g^2 \frac{s+t}{6\epsilon} + g^4 \frac{s^2 + st + t^2}{36\epsilon^2} + g^6 \frac{s^3 + \frac{2}{5}s^2t + \frac{2}{5}st^2 + t^3}{216\epsilon^3} \right]$$

#### D=6 N=2

**Result up to 5 loops** 

#### **Leading Divergences**



#### D=6 N=2

**Result up to 5 loops** 

#### **Leading Divergences**

$$L.P. = 2stg^{4} \left[ g^{2} \frac{s+t}{6\epsilon} + g^{4} \frac{s^{2} + st + t^{2}}{36\epsilon^{2}} + g^{6} \frac{s^{3} + \frac{2}{5}s^{2}t + \frac{2}{5}st^{2} + t^{3}}{216\epsilon^{3}} \right]$$
  
Geom progression !?

Leading powers of s > 0

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g^2 s}{6\epsilon}\right)^n = \frac{\frac{g^2 s}{6\epsilon}}{1 - \frac{g^2 s}{6\epsilon}} \qquad \qquad \text{Pole!} \qquad \epsilon \to +0$$

#### D=6 N=2

**Result up to 5 loops** 

#### **Leading Divergences**

$$L.P. = 2stg^4 \left[ g^2 \frac{s+t}{6\epsilon} + g^4 \frac{s^2 + st + t^2}{36\epsilon^2} + g^6 \frac{s^3 + \frac{2}{5}s^2t + \frac{2}{5}st^2 + t^3}{216\epsilon^3} \right]$$
  
Geom progression !?

Leading powers of s > 0

Leading powers of t < 0

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g^2 t}{6\epsilon}\right)^n = \frac{\frac{g^2 t}{6\epsilon}}{1 - \frac{g^2 t}{6\epsilon}} \qquad -1 \qquad \epsilon \to +0$$

#### D=6 N=2

**Result up to 5 loops** 

#### **Leading Divergences**

$$L.P. = 2stg^4 \left[ g^2 \frac{s+t}{6\epsilon} + g^4 \frac{s^2 + st + t^2}{36\epsilon^2} + g^6 \frac{s^3 + \frac{2}{5}s^2t + \frac{2}{5}st^2 + t^3}{216\epsilon^3} \right]$$
  
Geom progression !?

Leading powers of s > 0

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g^2 s}{6\epsilon}\right)^n = \frac{\frac{g^2 s}{6\epsilon}}{1 - \frac{g^2 s}{6\epsilon}} \qquad \qquad \text{Pole!} \qquad \qquad \epsilon \to +0$$

Leading powers of t < 0

 $g^2 = \frac{g_B^2}{1 - \frac{11C_2}{2} \frac{g_B^2}{c}}$ 

#### D=6 N=2

**Result up to 5 loops** 

#### **Leading Divergences**

$$L.P. = 2stg^4 \left[ g^2 \frac{s+t}{6\epsilon} + g^4 \frac{s^2 + st + t^2}{36\epsilon^2} + g^6 \frac{s^3 + \frac{2}{5}s^2t + \frac{2}{5}st^2 + t^3}{216\epsilon^3} \right]$$
  
Geom progression !?

Leading powers of s > 0

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g^2 s}{6\epsilon}\right)^n = \frac{\frac{g^2 s}{6\epsilon}}{1 - \frac{g^2 s}{6\epsilon}} \qquad \qquad \text{Pole!} \qquad \epsilon \to +0$$

Leading powers of t < 0

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g^2 t}{6\epsilon}\right)^n = \frac{\frac{g^2 t}{6\epsilon}}{1 - \frac{g^2 t}{6\epsilon}} \qquad \longrightarrow \qquad \epsilon \to +0$$

0

 $g^2 = \frac{g_B^2}{1 - \frac{11C_2}{2} \frac{g_B^2}{\epsilon}}$ 

Compare D=4 YM

General case will be given below



#### D=8 N=1 Leading Divergences

**Result up to 4 loops** 

$$\begin{split} L.P. &= -st \left[ g^2 \frac{1}{3!\epsilon} + g^4 \frac{s^2 + t^2}{3!4!\epsilon^2} + g^6 \frac{4}{3} \frac{15s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + 15t^4}{3!4!5!\epsilon^3} \right. \\ &+ g^8 \frac{1}{63} \frac{16770s^6 - 536s^5t + 412s^4t^2 - 384s^3t^3 + 412s^2t^4 - 536st^5 + 16770t^6}{3!4!5!6!\epsilon^4} \right]. \end{split}$$



D=8 N=1 **Leading Divergences** 

**Result up to 4 loops** 

$$L.P. = -st \left[ g^2 \frac{1}{3!\epsilon} + g^4 \frac{s^2 + t^2}{3!4!\epsilon^2} + g^6 \frac{4}{3} \frac{15s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + 15t^4}{3!4!5!\epsilon^3} + g^8 \frac{1}{63} \frac{16770s^6 - 536s^5t + 412s^4t^2 - 384s^3t^3 + 412s^2t^4 - 536st^5 + 16770t^6}{3!4!5!6!\epsilon^4} \right]$$

D=10 N=1

Leading Divergences

**Result up to 4 loops** 

$$\begin{split} L.P. &= -st \left[ g^2 \frac{s+t}{5!\epsilon} + g^4 \frac{8s^4 + 2s^3t + 2st^3 + 8t^4}{5!7!\epsilon^2} \\ &+ g^6 \frac{2(2095s^7 + 115s^6t + 33s^5t^2 - 11s^4t^3 - 11s^3t^4 + 33s^2t^5 + 115st^6 + 2095t^7)}{5!7!7!45\epsilon^3} \\ &+ g^8 \frac{32(211218880s^{10} + 753490s^9t - 1395096s^8t^2 + 1125763s^7t^3 - 916916s^6t^4}{13!7!7!5!5\epsilon^4} \\ &+ \frac{843630s^5t^5 - 916916s^4t^6 + 1125763s^3t^7 - 1395096s^2t^8 + 753490st^9 + 211218880t^{10})}{13!7!7!5!5\epsilon^4} \right]. \end{split}$$



D=8 N=1 **Leading Divergences** 

**Result up to 4 loops** 

$$L.P. = -st \left[ g^2 \frac{1}{3!\epsilon} + g^4 \frac{s^2 + t^2}{3!4!\epsilon^2} + g^6 \frac{4}{3} \frac{15s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + 15t^4}{3!4!5!\epsilon^3} + g^8 \frac{1}{63} \frac{16770s^6 - 536s^5t + 412s^4t^2 - 384s^3t^3 + 412s^2t^4 - 536st^5 + 16770t^6}{3!4!5!6!\epsilon^4} \right]$$

**D=10 N=1** 

Leading Divergences

#### **Result up to 4 loops**

$$\begin{split} L.P. &= -st \left[ g^2 \frac{s+t}{5!\epsilon} + g^4 \frac{8s^4 + 2s^3t + 2st^3 + 8t^4}{5!7!\epsilon^2} \\ &+ g^6 \frac{2(2095s^7 + 115s^6t + 33s^5t^2 - 11s^4t^3 - 11s^3t^4 + 33s^2t^5 + 115st^6 + 2095t^7)}{5!7!7!45\epsilon^3} \\ &+ g^8 \frac{32(211218880s^{10} + 753490s^9t - 1395096s^8t^2 + 1125763s^7t^3 - 916916s^6t^4}{13!7!7!5!5\epsilon^4} \\ &+ \frac{843630s^5t^5 - 916916s^4t^6 + 1125763s^3t^7 - 1395096s^2t^8 + 753490st^9 + 211218880t^{10})}{13!7!7!5!5\epsilon^4} \right]. \end{split}$$

Doesn't look like Geom progression anymore, however, coefficients grow slowly













$$nA_{n}^{t} = -\frac{1}{3}A_{n-1}^{t}, \qquad nA_{n}^{s} = -A_{n-1}^{s} + \frac{1}{3}A_{n-1}^{t}$$
$$A_{n}^{t} = \frac{(-1)^{n}}{3^{n-3}}\frac{1}{n!}, \qquad A_{n}^{s} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n}}{3^{n-3}}\frac{1}{n!} - \frac{1}{2}(-1)^{n}\frac{1}{n!}$$



$$nA_{n}^{t} = -\frac{1}{3}A_{n-1}^{t}, \qquad nA_{n}^{s} = -A_{n-1}^{s} + \frac{1}{3}A_{n-1}^{t}$$

$$A_{n}^{t} = \frac{(-1)^{n}}{3^{n-3}}\frac{1}{n!}, \qquad A_{n}^{s} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n}}{3^{n-3}}\frac{1}{n!} - \frac{1}{2}(-1)^{n}\frac{1}{n!}$$

$$(-g^{2}s)^{n-1}(-g^{2}t)$$









- Similar relations one can get for all other series
- All of them have 1/n! behavior
- Number of these series group as n!



**D=8 N=1** Horizontal boxes  $A_n^{(n)} = s^{n-1}A_n$ 

$$nA_n = -\frac{2}{4!}A_{n-1} + \frac{2}{5!}\sum_{k=1}^{n-2}A_kA_{n-1-k}, \quad n \ge 3$$
  $A_1 = 1/6$  **1 loop box**

D=8 N=1

#### Horizontal boxes

$$A_n^{(n)} = s^{n-1}A_n$$

$$nA_n = -\frac{2}{4!}A_{n-1} + \frac{2}{5!}\sum_{k=1}^{n-2}A_kA_{n-1-k}, \quad n \ge 3$$

 $A_1 = 1/6$  **1 loop box** 

$$\Sigma_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} A_n(-z)^n$$

D=8 N=1

#### Horizontal boxes

$$A_n^{(n)} = s^{n-1}A_n$$

$$nA_n = -\frac{2}{4!}A_{n-1} + \frac{2}{5!}\sum_{k=1}^{n-2}A_kA_{n-1-k}, \quad n \ge 3$$

 $A_1 = 1/6$  **1 loop box** 

$$\Sigma_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} A_n(-z)^n$$

$$-\frac{d}{dz}\Sigma_3 = -\frac{2}{4!}\Sigma_2 + \frac{2}{5!}\Sigma_1\Sigma_1.$$

**D=8 N=1** Horizontal boxes  $A_n^{(n)} = s^{n-1}A_n$ 

$$nA_n = -\frac{2}{4!}A_{n-1} + \frac{2}{5!}\sum_{k=1}^{n-2}A_kA_{n-1-k}, \quad n \ge 3$$
  $A_1 = 1/6$  **1 loop box**

$$\Sigma_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} A_n(-z)^n$$

$$-\frac{d}{dz}\Sigma_3 = -\frac{2}{4!}\Sigma_2 + \frac{2}{5!}\Sigma_1\Sigma_1. \qquad \Sigma_3 = \Sigma_1 + A_1z - A_2z^2, \quad \Sigma_2 = \Sigma_1 + A_1z, \quad A_1 = \frac{1}{3!}, \quad A_2 = -\frac{1}{3!4!}$$

- **D=8 N=1** Horizontal boxes  $A_n^{(n)} = s^{n-1}A_n$ 
  - $nA_n = -\frac{2}{4!}A_{n-1} + \frac{2}{5!}\sum_{k=1}^{n-2}A_kA_{n-1-k}, \quad n \ge 3$   $A_1 = 1/6$  **1 loop box**

Summation

$$\Sigma_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} A_n(-z)^n$$

$$-\frac{d}{dz}\Sigma_3 = -\frac{2}{4!}\Sigma_2 + \frac{2}{5!}\Sigma_1\Sigma_1. \qquad \Sigma_3 = \Sigma_1 + A_1z - A_2z^2, \quad \Sigma_2 = \Sigma_1 + A_1z, \quad A_1 = \frac{1}{3!}, \quad A_2 = -\frac{1}{3!4!}$$

 $\Sigma_A \equiv \Sigma_1$ 

Diff eqn

$$\frac{d}{dz}\Sigma_A = -\frac{1}{3!} + \frac{2}{4!}\Sigma_A - \frac{2}{5!}\Sigma_A^2 \qquad z = g^2 s^2/\epsilon$$



Summation **Summation** 

$$\Sigma_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} A_n(-z)^n$$

$$-\frac{d}{dz}\Sigma_3 = -\frac{2}{4!}\Sigma_2 + \frac{2}{5!}\Sigma_1\Sigma_1. \qquad \Sigma_3 = \Sigma_1 + A_1z - A_2z^2, \quad \Sigma_2 = \Sigma_1 + A_1z, \quad A_1 = \frac{1}{3!}, \quad A_2 = -\frac{1}{3!4!}$$

$$\Sigma_A \equiv \Sigma_1 \qquad \qquad \text{Diff eqn} \qquad \qquad \frac{d}{dz} \Sigma_A = -\frac{1}{3!} + \frac{2}{4!} \Sigma_A - \frac{2}{5!} \Sigma_A^2 \qquad \qquad z = g^2 s^2 / \epsilon$$

$$\Sigma_A(z) = -\sqrt{5/3} \frac{4\tan(z/(8\sqrt{15}))}{1-\tan(z/(8\sqrt{15}))\sqrt{5/3}} = \sqrt{10} \frac{\sin(z/(8\sqrt{15}))}{\sin(z/(8\sqrt{15})-z_0)}$$

$$\Sigma(z) = -(z/6 + z^2/144 + z^3/2880 + 7z^4/414720 + \dots) \qquad z_0 = \arcsin(\sqrt{3/8})$$

#### **D=6 N=2**

s-channel term  $S_n(s,t)$  t-channel term  $T_n(s,t)$   $T_n(s,t) = S_n(t,s)$ 

#### **Exact relation for ALL diagrams**

$$nS_n(s,t) = -2s \int_0^1 dx \int_0^x dy \, (S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t')) \qquad n \ge 4$$
$$t' = t(x-y) - sy$$
$$S_3 = -s/3, \ T_3 = -t/3$$

#### **D=6 N=2**

s-channel term  $S_n(s,t)$  t-channel term  $T_n(s,t)$   $T_n(s,t) = S_n(t,s)$ 

#### **Exact relation for ALL diagrams**

$$nS_n(s,t) = -2s \int_0^1 dx \int_0^x dy \, (S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t')) \qquad n \ge 4$$
$$t' = t(x-y) - sy$$
$$S_3 = -s/3, \ T_3 = -t/3$$

$$T_3 = -s/3, \ T_3 = -t/3$$
  
 $\Sigma_k(s, t, z) = \sum_{n=k}^{\infty} (-z)^n S_n(s, t)$ 

#### D=6 N=2

s-channel term  $S_n(s,t)$  t-channel term  $T_n(s,t)$   $T_n(s,t) = S_n(t,s)$ Exact relation for ALL diagrams  $nS_n(s,t) = -2s \int_0^1 dx \int_0^x dy \ (S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t'))$   $n \ge 4$  t' = t(x-y) - sy  $S_3 = -s/3, \ T_3 = -t/3$ Summation  $\Sigma_k(s,t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n S_n(s,t)$ 

Diff eqn

$$\frac{d}{dz}\Sigma_4(s,t,z) = 2s \int_0^1 dx \int_0^x dy \ (\Sigma_3(s,t',z) + \Sigma_3(t',s,z))|_{t'=xt+yu}$$

#### **D=6 N=2**

s-channel term  $S_n(s,t)$  t-channel term  $T_n(s,t)$   $T_n(s,t) = S_n(t,s)$ **Exact relation for ALL diagrams** 

$$nS_n(s,t) = -2s \int_0^1 dx \int_0^x dy \, \left(S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t')\right) \qquad \begin{array}{l} n \ge 4\\ t' = t(x-y) - sy\end{array}$$

Summation  

$$S_{3} = -s/3, \ T_{3} = -t/3$$

$$\Sigma_{k}(s,t,z) = \sum_{n=k}^{\infty} (-z)^{n} S_{n}(s,t)$$
Diff compared  $d$ 

Diff eqn

 $\frac{d}{dz}\Sigma_4(s,t,z) = 2s \int_0 dx \int_0 dy \, (\Sigma_3(s,t',z) + \Sigma_3(t',s,z))|_{t'=xt+yu}$  $\Sigma_4(s,t,z) = \Sigma_3(s,t,z) + S_3(s,t)z^3$   $\Sigma(s,t,z) = z^{-2}\Sigma_3(s,t,z)$ 

#### **D=6 N=2**

s-channel term  $S_n(s,t)$  t-channel term  $T_n(s,t)$   $T_n(s,t) = S_n(t,s)$ **Exact relation for ALL diagrams**  $nS_n(s,t) = -2s \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t') \right) \qquad \begin{array}{l} n \ge 4\\ t' = t(x-y) - sy\end{array}$ 

 $S_3 = -s/3, T_3 = -t/3$  $\Sigma_k(s,t,z) = \sum (-z)^n S_n(s,t)$ n = k

**Summation** 

Diff e

Fiff eqn 
$$\frac{d}{dz} \Sigma_4(s,t,z) = 2s \int_0^1 dx \int_0^x dy \ (\Sigma_3(s,t',z) + \Sigma_3(t',s,z))|_{t'=xt+yu}$$
$$\Sigma_4(s,t,z) = \Sigma_3(s,t,z) + S_3(s,t)z^3 \qquad \Sigma(s,t,z) = z^{-2} \Sigma_3(s,t,z)$$

$$\frac{d}{dz}\Sigma(s,t,z) = s - \frac{2}{z}\Sigma(s,t,z) + 2s \int_0^1 dx \int_0^x dy \ (\Sigma(s,t',z) + \Sigma(t',s,z))|_{t'=xt+yu}$$

#### **D=8 N=1**

s-channel term  $S_n(s,t)$  t-channel term  $T_n(s,t)$   $T_n(s,t) = S_n(t,s)$ 

#### **Exact relation for ALL diagrams**

$$nS_{n}(s,t) = -2s^{2} \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} dy \ y(1-x) \ (S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t'))|_{t'=tx+yu}$$
  
+  $s^{4} \int_{0}^{1} dx \ x^{2}(1-x)^{2} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{2k-2} \frac{1}{p!(p+2)!} \ \frac{d^{p}}{dt'^{p}} (S_{k}(s,t') + T_{k}(s,t')) \times$   
 $S_{1} = \frac{1}{12}, \ T_{1} = \frac{1}{12} \qquad \times \frac{d^{p}}{dt'^{p}} (S_{n-1-k}(s,t') + T_{n-1-k}(s,t'))|_{t'=-sx} \ (tsx(1-x))^{p}$ 

#### **D=8 N=1**

s-channel term  $S_n(s,t)$  t-channel term  $T_n(s,t)$   $T_n(s,t) = S_n(t,s)$ 

#### **Exact relation for ALL diagrams**

$$nS_{n}(s,t) = -2s^{2} \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} dy \ y(1-x) \ (S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t'))|_{t'=tx+yu}$$
  
+  $s^{4} \int_{0}^{1} dx \ x^{2}(1-x)^{2} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{2k-2} \frac{1}{p!(p+2)!} \ \frac{d^{p}}{dt'^{p}} (S_{k}(s,t') + T_{k}(s,t')) \times$   
 $S_{1} = \frac{1}{12}, \ T_{1} = \frac{1}{12} \qquad \times \frac{d^{p}}{dt'^{p}} (S_{n-1-k}(s,t') + T_{n-1-k}(s,t'))|_{t'=-sx} \ (tsx(1-x))^{p}$ 

#### summation

#### **D=8 N=1**

s-channel term  $S_n(s,t)$  t-channel term  $T_n(s,t)$   $T_n(s,t) = S_n(t,s)$ 

#### **Exact relation for ALL diagrams**

$$nS_{n}(s,t) = -2s^{2} \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} dy \ y(1-x) \ (S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t'))|_{t'=tx+yu}$$
  
+  $s^{4} \int_{0}^{1} dx \ x^{2}(1-x)^{2} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{2k-2} \frac{1}{p!(p+2)!} \ \frac{d^{p}}{dt'^{p}} (S_{k}(s,t') + T_{k}(s,t')) \times$   
 $S_{1} = \frac{1}{12}, \ T_{1} = \frac{1}{12} \qquad \times \frac{d^{p}}{dt'^{p}} (S_{n-1-k}(s,t') + T_{n-1-k}(s,t'))|_{t'=-sx} \ (tsx(1-x))^{p}$ 

 $\Sigma_3(s,t,z) = \Sigma_1(s,t,z) - S_2(s,t)z^2 + S_1(s,t)z, \ \Sigma_2(s,t,z) = \Sigma_1(s,t,z) + S_1(s,t)z$ summation

#### D=8 N=1

s-channel term  $S_n(s,t)$  t-channel term  $T_n(s,t)$   $T_n(s,t) = S_n(t,s)$ 

#### **Exact relation for ALL diagrams**

$$nS_{n}(s,t) = -2s^{2} \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} dy \ y(1-x) \ (S_{n-1}(s,t') + T_{n-1}(s,t'))|_{t'=tx+yu}$$
  
+  $s^{4} \int_{0}^{1} dx \ x^{2}(1-x)^{2} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{2k-2} \frac{1}{p!(p+2)!} \ \frac{d^{p}}{dt'^{p}} (S_{k}(s,t') + T_{k}(s,t')) \times$   
 $S_{1} = \frac{1}{12}, \ T_{1} = \frac{1}{12} \qquad \times \frac{d^{p}}{dt'^{p}} (S_{n-1-k}(s,t') + T_{n-1-k}(s,t'))|_{t'=-sx} \ (tsx(1-x))^{p}$ 

summation  $\Sigma_3(s,t,z) = \Sigma_1(s,t,z) - S_2(s,t)z^2 + S_1(s,t)z, \ \Sigma_2(s,t,z) = \Sigma_1(s,t,z) + S_1(s,t)z$ Diff eqn

$$\begin{split} &\frac{d}{dz}\Sigma(s,t,z) = -\frac{1}{12} + 2s^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \ y(1-x) \ (\Sigma(s,t',z) + \Sigma(t',s,z))|_{t'=tx+yu} \\ &-s^4 \int_0^1 dx \ x^2(1-x)^2 \sum_{p=0}^\infty \frac{1}{p!(p+2)!} (\frac{d^p}{dt'^p} (\Sigma(s,t',z) + \Sigma(t',s,z))|_{t'=-sx})^2 \ (tsx(1-x))^p. \end{split}$$

# All loop Solution (leading divs)



PT (15 terms)



Numerical solution of the full equation is close to the ladder approx

# All loop Solution (leading divs)



The UV divergences for the on-shell scattering amplitudes DO NOT CANCEL in any given order of PT

The UV divergences for the on-shell scattering amplitudes DO NOT CANCEL in any given order of PT

The recurrence relations allow one to calculate the leading UV divergences in ALL orders of PT algebraically starting from 1 loop

The UV divergences for the on-shell scattering amplitudes DO NOT CANCEL in any given order of PT

The recurrence relations allow one to calculate the leading UV divergences in ALL orders of PT algebraically starting from 1 loop

The recurrence relations allow one to calculate the sub leading UV divergences in ALL orders of PT algebraically starting from 1 and 2 loops

The UV divergences for the on-shell scattering amplitudes DO NOT CANCEL in any given order of PT

The recurrence relations allow one to calculate the leading UV divergences in ALL orders of PT algebraically starting from 1 loop

The recurrence relations allow one to calculate the sub leading UV divergences in ALL orders of PT algebraically starting from 1 and 2 loops

This procedure apparently continues the same way for all divergences just like in renormalizable theories

The sum of the leading UV divergences to ALL orders obeys the nonlinear integro-differential equation

The sum of the leading UV divergences to ALL orders obeys the nonlinear integro-differential equation

The numerical solution indicates that solution to the full equation seems to behave like the ladder approximation

The sum of the leading UV divergences to ALL orders obeys the nonlinear integro-differential equation

The numerical solution indicates that solution to the full equation seems to behave like the ladder approximation

 $\mathbf{F}$  There is no simple limit when  $\epsilon 
ightarrow +0$ 

The sum of the leading UV divergences to ALL orders obeys the nonlinear integro-differential equation

The numerical solution indicates that solution to the full equation seems to behave like the ladder approximation

 $\mathbf{F}$  There is no simple limit when  $\epsilon 
ightarrow +0$ 

This means that one cannot simply remove the UV divergence and nonrenormalizability of a theory is not improved when summing the infinite series

The sum of the leading UV divergences to ALL orders obeys the nonlinear integro-differential equation

The numerical solution indicates that solution to the full equation seems to behave like the ladder approximation

 $\mathbf{F}$  There is no simple limit when  $\epsilon 
ightarrow +0$ 

This means that one cannot simply remove the UV divergence and nonrenormalizability of a theory is not improved when summing the infinite series

The knowledge of all loop form of the UV divergences remains to be exploited