Конфлюэнтные функции Гойна в теории черных дыр

И.П. Волобуев, С.И. Кейзеров, Э.Р. Рахметов

НИИЯФ МГУ

2 апреля 2024 г.

Специальные функции и линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейные дифференциальные уравнения математической физики могут быть приведены к виду

$$P_0(z)y''(z) + P_1(z)y'(z) + P_2(z)y(z) = 0,$$

где $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ полиномы комплексной переменой z. Нули полинома $P_0(z)$ и, возможно, $z = \infty$ являются особыми точками этого уравнения.
Если функция $P(z) = P_1(z)/P_0(z)$ имеет полюс не выше первого порядка, а функция $Q(z) = P_2(z)/P_0(z)$ имеет полюс не выше второго порядка в особой точке $z = z^*$, эта точка называется регулярной или фуксовой особой точкой. Особая точка на бесконечности является фуксовой, если

$$P(z) = O(z^{-1}), \quad Q(z) = O(z^{-2}).$$

Дифференциальное уравнение называется фуксовым, если все его особые точки являются регулярными особыми точками. В противном случае уравнение называется нефуксовым.
Каждой особой точке z_j дифференциального уравнения может быть поставлен в соответствие ее ранг особой точки, или s-ранг, обозначаемый $R(z_j)$.
Он определяется поведением полиномов $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ в точке z_j:

$$R(z_j) = max\left(K_1(z_j), \frac{K_2(z_j)}{2}\right),$$

где $K_1(z_j)$ – кратность нуля функции $P_0(z)/P_1(z)$ в точке z_j, а $K_2(z_j)$ – кратность нуля функции $P_0(z)/P_2(z)$ в той же точке.
Набор s-рангов особых точек уравнения называется s-мультисимволом дифференциального уравнения.

Конфлюэнция означает слияние двух особых точек дифференциального уравнения, выражающееся в таком изменении коэффициентов полиномов $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ (свободных параметров уравнения), что возникающая в результате особая точка предельного уравнения имеет s-ранг больше, чем s-ранги исходных точек.

Почти все специальные функции математической физики могут быть получены из гипергеометрического дифференциального уравнения, которое имеет следующий стандартный вид:

$$z(1-z)y''(z)+[c-(a+b+1)z]y'(z)-aby(z)=0.$$

Это уравнение имеет три особых точки $z=0$, $z=1$, $z=\infty$, а его s-мультисимвол равен $\{1;1;1\}$. Это уравнение и получающиеся из него в результате конфлюэнции уравнения имеют решениями функции Бесселя, Лежандра, Эйри и все ортогональные полиномы: Якоби, Лагерра, Лежандра, Эрмита, Гегенбауэра и Чебышева.

Следующим по сложности уравнением является уравнение Гойна, стандартная каноническая форма которого имеет вид

$$\begin{aligned} & z(1-z)(z-t)y''(z) \\ + & [c(1-z)(z-t)+dz(z-t)-(a+b+1-c-d)z(z-1)]y'(z) \\ + & (abz-\lambda)y(z)=0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет четыре особых точки $z=0$, $z=1$, $z=t$, $z=\infty$, а его s-мультисимвол равен $\{1;1;1;1\}$. С помощью конфлюэнции из него можно получить конфлюэнтное уравнение Гойна (КУГ) с тремя особыми точками $z=0$, $z=1$, $z=\infty$, из которых точка $z=\infty$ имеет s-ранг 2 и является нефуксовой. Оказывается, что такое уравнение возникает в ряде физических задач, в частности, в теории черных дыр.

Уравнение Гойна как дифференциальное уравнение второго порядка с четырьмя особыми точками было впервые введено в 1889 Карлом Гойном в работе «К теории функций Римана второго порядка с четырьмя точками ветвления», Math. Annalen. 1889. Vol 33. S. 51, и в физике фактически не использовалось в течение ста лет. Серьезный прогресс в этой области наметился только после юбилейной конференции «Рабочее совещание, посвященное столетию уравнения Гойна: теория и приложения», прошедшей в Баварии 3-8 сентября 1989 года (см. классическую монографию «Дифференциальные уравнения Гойна», под редакцией А. Ронво). Начало систематического использования этих новых специальных функций в физике можно отнести к 90-м годам прошлого века, когда было обнаружено, что многие известные уравнения математической физики сводятся к уравнениям класса Гойна.

В конце прошлого века появились примеры применения этих функций в задачах атомной и молекулярной физики, например, описание эффекта Штарка для атома водорода и нахождение энергетического спектра иона молекулы водорода; в различных задачах квантовой механики, в которых возникают потенциалы, приводящие к конфлюэнтным уравнениям; а также в астрофизике для решения уравнения Тюкольского, описывающего возмущения метрики Керра вращающейся черной дыры (M. Hortacsu, Heun Functions and Some of Their Applications in Physics, Adv.High Energy Phys. 2018 (2018) 8621573).
В начале 21-го века количество работ, посвященных использованию конфлюэнтных функций Гойна в различных областях физики, существенно возросло. Например, в астрофизике можно отметить серию работ П. Физиева, затрагивающих вопросы получения точных решений аналога уравнений Тюкольского, описывающего возмущения метрики различных черных дыр.

В частности, отметим работу о точных решениях уравнения Редже-Уиллера, посвященную колебаниям метрики внутри черной дыры Шварцшильда, P. Fiziev, Class. Quant. Grav. 23 (2006) 2447, а также P. Fiziev, Phys. Rev. D 80 (2009) 124001. Также появилось значительное количество работ, посвященных задачам на стыке астрофизики и квантовой теории поля, в которых рассматривается уравнение Клейна-Гордона для скалярного поля на фоне метрики различных черных дыр. Рассматривались сферически-симметричные метрики типа Швацшильда (Zecca A., Nuovo Cim. B, 124, 1251, (2009), Рейснера-Нордстрема и аксиально-симметричные метрики типа Керра (H.S.Vieira, General Relativity and Gravitation 48,(2016)) и Керра-Ньюмена (G.V. Kraniotis, Class. and Quant. Gravity, 33 (2016) 225011).

Однако в этих работах не были явно выделены физические решения, являющиеся конечными везде вне горизонта черной дыры. Далее мы подробно обсудим применение КУГ для описания состояний скалярного поля в метрике различных ч.д. и проблему выделения физических решений.

Сферически симметричные черные дыры

Каноническое квантование полей в гравитационном поле черной дыры требует знания спектра и решений уравнений свободных полей в метрике черной дыры. Для массивного скалярного поля в случае сферически-симметричной метрики уравнение Клейна-Гордона имеет вид

$$(\Box + m^2)\,\phi = \left[\frac{1}{f}\partial_t^2 - \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 f \partial_r - \frac{1}{r^2}\Delta_{S_2} + m^2\right]\phi = 0$$

Корни уравнения $f = 0$ определяют особенности метрики, обозначаемые $r_\pm$ и называемые внутренним и внешним горизонтами черной дыры.

$f = 1 - \frac{r_0}{r}$ для черной дыры Шварцшильда.

$f = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{GQ^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ для черной дыры Рейснера-Нордстрема с электрическим зарядом Q.

$f = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{G(Q^2+Q_m^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ для черной дыры с магнитным зарядом Q_m и электрическим зарядом Q.

Уравнение Клейна-Гордона в сферически-симметричной метрике допускает разделение переменных, т.е. решение можно записать в виде

$$\phi = e^{-iEt} R\left(r\right) Y_l\left(\theta, \varphi\right)$$

где Y_l - сферическая функция с собственным значением $-l(l+1)$, то есть $\Delta_{S_2} Y_l = -l\left(l+1\right) Y_l$, в $R(r)$ - радиальная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\left[-\frac{E^2}{f} - \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 f \partial_r + \frac{l\left(l+1\right)}{r^2} + m^2\right] R = 0$$

В работе Zecca A., Nuovo Cim. B, 124, 1251, (2009), присутствовало указание, что решения аналогичного уравнения для черной дыры Шварцшильда выражаются через функции Гойна, однако явный вид решений не приводился. В статье H.S.Vieira, General Relativity and Gravitation 48,(2016), были представлены решения для заряженных черных дыр, однако физические решения выделены не были.

Анализ особых точек дифференциального уравнения позволяет многое узнать о его решениях и их спектре. Для черных дыр, описываемых сферически-симметричными метриками, нормированная на r_0 радиальная часть уравнения Клейна-Гордона имеет три особых точки: $r_1 = r_-$, $r_2 = r_+$, $r_3 = \infty$, где $r_\pm$ – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов. Первые две из них являются так называемыми фуксовыми особыми точками, третья – нефуксовой особой точкой. Ранги этих особых точек равны 1, 1 и 2 соответственно, а следовательно, мультисимвол уравнения есть $\{1;1;2\}$. Согласно монографии «Специальные функции. Единая теория, основанная на анализе особенностей», С. Славянов, В. Лай, уравнение с таким мультисимволом является конфлюэнтным уравнением Гойна, и поэтому может быть приведено к одной из стандартных форм конфлюэнтного уравнения Гойна с помощью подстановки и замены переменной, приведенных на следующем слайде.

После подстановки и замены переменной вида

$$R(r) = (r - r_-)^{-i\frac{r_-^2\omega}{r_+ - r_-}} (r - r_+)^{i\frac{r_+^2\omega}{r_+ - r_-}} e^{ikr}\Phi(r)$$

$$r = (r_+ - r_-)\rho + r_-, \quad \Phi(r) = \Phi((r_+ - r_-)\rho + r_-) \equiv F(\rho)$$

где $\omega = Er_0$, $\mu = mr_0$, $k^2 = \omega^2 - \mu^2$, для функции $F(\rho)$ получаем стандартную форму конфлюэнтного уравнения Гойна:

$$\left[\rho(\rho - 1)\partial_\rho^2 + (-b\rho(\rho - 1) + c(\rho - 1) + d\rho)\partial_\rho + (-ba\rho + \lambda)\right] F = 0,$$

где параметры уравнения выражаются через введенные ранее безразмерные физические величины следующим образом:

$$a = 1 + \frac{(\omega - k)^2}{i2k}, b = -i2k(r_+ - r_-), c = 1 - i\frac{2r_-^2\omega}{r_+ - r_-},$$

$$d = 1 + i\frac{2\omega {r_+}^2}{(r_+ - r_-)}, \lambda = (\omega - k)^2 {r_-}^2 - l(l+1) + i(\omega - (r_+ - r_-)k).$$

Согласно монографии С. Славянова и В. Лая, общее решение конфлюэнтного уравнения регулярное на внешнем горизонте может быть записано как сумма двух линейно независимых решений $F^{(1)}(\rho)$ и $\tilde{F}^{(1)}$, каждое из которых можно рассматривать как ряд с радиусом сходимости единица, построенный методом Фробениуса в окрестности внешнего горизонта ($\rho = 1$, т.е. $r = r_+$).

$$F(\rho) = A_1 Hc\left[ab - \lambda, ab, d, c, b, 1 - \rho\right] + A_2 (1-\rho)^{1-d} \times$$
$$\times\, Hc\left[ab - \lambda + (b - c)(1 - d), b(1 - d + a), 2 - d, c, b, 1 - \rho\right],$$

где через $Hc\left[ab - \lambda, ab, d, c, b, 1 - \rho\right]$ обозначена конфлюэнтная функция Гойна, с соответствующими параметрами, а A_1 и A_2 произвольные константы.
Оба слагаемых в общем решении являются бесконечно быстро осциллирующими и ограниченными на внешнем горизонте и регулярными в области $r_+ < r < \infty$.

Радиус сходимости решений, полученных методом Фробениуса, равен 1. Поэтому для оценки асимптотического поведения решения в бесконечно удаленной точке используются решения Томе: $F^{(\infty)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^{-j-a}$ и $\tilde{F}^{(\infty)}(z) = e^{bz} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}_j z^{-j+a-c-d}$.
Линейная комбинация из первых членов каждого ряда дает поведение общего решения $F(\rho)$ при больших ρ.

$$F^{(\infty)}(\rho)_{\rho\to\infty} \sim B_1\rho^{-a} + e^{b\rho}B_2\rho^{a-c-d},$$

где B_1 и B_2 произвольные константы. Отсюда для радиальной функции, получаем асимптотическое поведение при больших ρ:

$$R(r)|_{r\to\infty} \sim \left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)^{i\frac{\omega r_+^2}{r_+-r_-}} \left\{B_1 e^{ik(r-r_-)}(r-r_-)^{i\frac{2\omega^2-\mu^2}{2k}-1} + \right.$$
$$\left. + B_2 e^{-ik(r-r_-)}(r-r_-)^{-i\frac{2\omega^2-\mu^2}{2k}-1}\right\}.$$

При построении физического решения коэффициенты B_1 и B_2 определяются из условия несингулярного поведения решения на бесконечности, проистекающего из требовния нормировки решения на дельта-функцию. Возможны два различных варианта асимптотического поведения выражения для $R(r)$:

- Если $k = \pm\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ - вещественное, т. е. $\omega > \mu$, то оба решения на бесконечности убывают как $1/r$. В этом случае требование, чтобы физическое решение было регулярно на бесконечности, не накладывает никаких условий на произвольные константы B_1 и B_2.
- Если $k = \pm i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ является чисто мнимым, то энергия частицы меньше ее массы, $\omega < \mu$, что соответствует связанному состоянию. В таком случае одно из решений на бесконечности экспоненциально спадает, а второе экспоненциально растет. Поэтому, чтобы получить физическое решение, убывающее на бесконечности, следует положить равной нулю одну из констант B_1 или B_2 в зависимости от выбора знака в $k = \pm i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$.

Из анализа асимптотического поведения решений на бесконечности следует, что для выделения физического решения, выражающегося через функции Гойна, необходимо задать такую связь между коэффициентами A_1 и A_2, чтобы в получившейся линейной комбинации сокращалась экспоненциально растущая на бесконечности часть. Для этого следует выяснить, как линейно независимые решения на горизонте $F^{(1)}(\rho) = Hc\left[ab - \lambda, ab, d, c, b, 1 - \rho\right]$ и $\tilde{F}^{(1)} = (1 - \rho)^{1-d} Hc\left[ab - \lambda + (1 - d), b(1 - d + a), 2 - d, c, b, 1 - \rho\right]$, выраженные через конфлюэнтные функции Гойна, выражаются через решения Томе $F^{(\infty)}(z)$ и $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$. Решения на горизонте, выраженные через Функции Гойна, и решения Томе $F^{(\infty)}(z)$ и $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$ имеют общую область сходимости $1 < \rho < 2$. Следовательно, некоторая линейная комбинация функций $F^{(\infty)}(z)$ и $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$ является аналитическим продолжением функций Гойна в область $2 < \rho < \infty$ Коэффициенты в таких линейных комбинациях можно определить следующим образом.

Поскольку области сходимости функций $F^{(1)}(\rho)$, $\tilde{F}^{(1)}$ и $F^{(\infty)}(z)$, $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$ имеют пересекающийся интервал $1 < \rho < 2$, то для произвольной точки ρ_* этого интервала мы можем записать следующие разложения, выражающие решения и их первые производные на бесконечности $F^{(\infty)}(z)$, $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$ через решения $F^{(1)}(\rho)$, $\tilde{F}^{(1)}$ и их первые производные на горизонте:

$$F^{(\infty)}(\rho_*) = C_1 F^{(1)}(\rho_*) + C_2 \tilde{F}^{(1)}(\rho_*),$$

$$F^{(\infty)'}(\rho_*) = C_1 F^{(1)'}(\rho_*) + C_2 \tilde{F}'_{(1)}(\rho_*),$$

$$\tilde{F}^{(\infty)}(\rho_*) = \tilde{C}_1 F^{(1)}(\rho_*) + \tilde{C}_2 \tilde{F}^{(1)}(\rho_*),$$

$$\tilde{F}'_{(\infty)}(\rho_*) = \tilde{C}_1 F^{(1)'}(\rho_*) + \tilde{C}_2 \tilde{F}'_{(1)}(\rho_*),$$

где штрих обозначает производную по аргументу. Решая эти уравнения относительно коэффициентов C_1, $\tilde{C}_1$, C_2, $\tilde{C}_2$, получим:

$$C_1 = \frac{\tilde{F}'_{(1)}(\rho_*)\, F^{(\infty)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*)\, F^{(\infty)\prime}(\rho_*)}{F^{(1)}(\rho_*)\, \tilde{F}'_{(1)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*)\, F^{(1)\prime}(\rho_*)}$$

$$C_2 = \frac{-F^{(1)\prime}(\rho_*)\, F^{(\infty)}(\rho_*) + F^{(1)}(\rho_*)\, F^{(\infty)\prime}(\rho_*)}{F^{(1)}(\rho_*)\, \tilde{F}'_{(1)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*)\, F^{(1)\prime}(\rho_*)}$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{\tilde{F}'_1(\rho_*)\, \tilde{F}^{(\infty)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*)\, \tilde{F}'_{(\infty)}(\rho_*)}{F^{(1)}(\rho_*)\, \tilde{F}'_{(1)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*)\, F^{(1)\prime}(\rho_*)}$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{-F^{(1)\prime}(\rho_*)\, \tilde{F}^{(\infty)}(\rho_*) + F^{(1)}(\rho_*)\, \tilde{F}'_{(\infty)}(\rho_*)}{F^{(1)}(\rho_*)\, \tilde{F}'_{(1)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*)\, F^{(1)\prime}(\rho_*)}$$

Используя разложение общего решения по решениям вблизи горизонта $F(\rho) = A_1 F^{(1)}(\rho) + A_2 \tilde{F}^{(1)}(\rho)$ и сравнивая с разложением общего решения по решениям в бесконечно удаленной точке $F(\rho) = B_1 F^{(\infty)}(\rho) + B_2 \tilde{F}^{(\infty)}(\rho)$, получим $A_1 = B_1 C_1 + B_2 \tilde{C}_1$ и $A_2 = B_1 C_2 + B_2 \tilde{C}_2$

В итоге имеем два типа решений:

- Состояния финитного движения, когда энергия частицы меньше ее массы $\omega < \mu$, с мнимым $k = \pm i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$, для которых получаем, что отношение констант A_1/A_2 зависит только от отношения констант C и $\tilde{C}$:

$$\frac{A_1}{A_2} \equiv K_{\pm} = \begin{cases} \frac{\tilde{F}'_{(1)}(\rho_*)F^{(\infty)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*)F^{(\infty)\prime}(\rho_*)}{F^{(1)}(\rho_*)F^{(\infty)\prime}(\rho_*) - F^{(1)\prime}(\rho_*)F^{(\infty)}(\rho_*)} & k = i\sqrt{\mu^2 - \omega^2} \\ \frac{\tilde{F}'_{(1)}(\rho_*)\tilde{F}^{(\infty)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*)\tilde{F}'_{(\infty)}(\rho_*)}{F^{(1)}(\rho_*)\tilde{F}'_{(\infty)}(\rho_*) - F^{(1)\prime}(\rho_*)\tilde{F}^{(\infty)}(\rho_*)} & k = -i\sqrt{\mu^2 - \omega^2} \end{cases}$$

- Состояния инфинитного движения, когда $\omega > \mu$, с вещественным $k = \pm\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$, для которых на константы A_1 и A_2 накладываются только условия нормировки.

Полученные состояния непрерывного спектра могут быть нормированы на дельта-функцию:

$$\int_{r_+}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ R^* \left(...; r \right) R \left(...'; r \right) + h.c. \right\} \frac{r^4}{\left(r - r_- \right) \left(r - r_+ \right)} dr = \frac{1}{2\omega} \delta \left(\left| k - k' \right| \right)$$

Для вычисления этого интеграла разобьем интервал интегрирования на 3 части:

$$\gamma_1 : \quad r_+ \leq r \leq r_4, \quad \gamma_2 : \quad r_4 \leq r \leq r_5, \quad \gamma_3 : \quad r_5 \leq r < \infty.$$

На интервале γ_1 нормировочный интеграл расходится. На интервале γ_2 он конечен. На интервале γ_3 при $\omega > \mu$ нормировочный интеграл осциллирует, а при $\omega < \mu$ экспоненциально убывает. Поэтому при вычислении нормировки, если $\omega > \mu$, следует учесть интегралы по γ_1 и γ_3, а если $\omega < \mu$, то учитывается только интегрирование по γ_1.

Тогда для констант нормировки получаем следующие значения:

- Для связанных состояний, когда энергия частицы меньше ее массы $\omega < \mu$, с мнимым $k = \pm i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$,

$$A_1^2 = \frac{|K_\pm|\,|k|}{2\pi r_+^2 \left(1 + |K_\pm|^2\right)\omega^2}, \quad A_2^2 = \frac{|k|}{2\pi r_+^2 \left(1 + |K_\pm|^2\right)\omega^2}.$$

- Для состояний инфинитного движения, когда $\omega > \mu$, с вещественным $k = \pm\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$, при $i = 1, 2$

$$A_i = \frac{1}{2\sqrt{\omega}}\left\{C_i\sqrt{1 \pm \frac{P}{\sqrt{P^2 + |Q|^2}}} + \tilde{C}_i\sqrt{1 \mp \frac{P}{\sqrt{P^2 + |Q|^2}}}\right\},$$

где

$$P \equiv \frac{r_+^2\omega}{|k|}\left[\left(|C_1|^2 + |C_2|^2\right) - \left(\left|\tilde{C}_1\right|^2 + \left|\tilde{C}_2\right|^2\right)\right],$$

$$Q \equiv 2\left[1 + \frac{r_+^2\omega}{|k|}\left(C_1\tilde{C}_1^* + C_2\tilde{C}_2^*\right)\right].$$

Аксиально-симметричные метрики: метрика Керра

Вращающаяся черная дыра описывается метрикой Керра. Уравнение Клейна-Гордона $\left[\Box + \mu^2\right]\phi = 0$ для скалярного поля ϕ в такой метрике допускает разделение переменных, т.е. решение можно записать в виде:

$$\phi = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} X\left(r, \theta\right),$$

где $X\left(r, \theta\right)$ подчиняется уравнению

$$\left\{\Delta\partial_r^2 + \Delta'\partial_r + r\left(r+1\right)\omega^2 - \mu^2 r^2 + \frac{\left(r\omega - Jm\right)^2}{\Delta}\right\} X +$$

$$+\left[\partial_\theta^2 + \operatorname{ctg}\theta\partial_\theta + J^2\left(\omega^2 - \mu^2\right)\cos^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] X = 0,$$

J - полный вращательный момент черной дыры, отнесенный к ее массе, $\Delta = r^2 - r + J^2$, и где, как и в случае черной дыры Шварцшильда, мы произвели нормировку размерных величин на r_0 - радиус Шваршильда.

Угловая и радиальная переменные также разделяются, то есть решение может быть записано в виде $X = \Omega(\theta) R(r)$, где функции $\Omega(\theta)$ и $R(r)$ по отдельности подчиняются следующим уравнениям:

$$\left[\partial_\theta^2 + \operatorname{ctg}\theta\partial_\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + J^2\left(\omega^2 - \mu^2\right)\cos^2\theta\right]\Omega = \lambda\Omega,$$

$$\left\{\left(r^2 - r + J^2\right)\partial_r^2 + (2r-1)\partial_r + \left(\omega^2 - \mu^2\right) r^2\right\} R +$$
$$+ \left\{\omega^2 r + (\omega r - Jm)^2/(r^2 - r + J^2) + \lambda\right\} R = 0.$$

После вычисления кратностей нулей соответствующих полиномиальных коэффициентов, оказывается, что оба уравнения имеют мультисимвол $\{1;1;2\}$, и поэтому являются конфлюэнтными уравнениями Гойна, которые могут быть переписаны в стандартной форме.

Уравнение для угловой переменной записывается в стандартной форме КУГ следующим образом:

$$\left[\partial_z \left(1 - z^2\right) \partial_z + J^2 \left(\omega^2 - \mu^2\right) \left(z^2 - 1\right)\right] \Omega +$$
$$+ \left[\left(J^2 \left(\omega^2 - \mu^2\right) - \lambda\right) - \frac{m^2}{1 - z^2}\right] \Omega = 0$$

где мы использовали замену переменной вида $\cos\theta = z$, $-1 \leq z \leq 1$. Особыми точками этого уравнения являются $z = \pm 1$ и $z = \infty$. Отметим, что последняя точка не является физической, так как ей соответствует мнимое значение угловой переменной $\theta = i\infty$. Поэтому для этого уравнения нет необходимости изучать поведение решений на бесконечности, а можно сразу записать общее решение в виде линейной комбинации функций Гойна, с соответствующими параметрами.

Уравнение для радиальной функции приводится к стандартной форме конфлюэнтного уравнения Гойна с помощью подстановки $R(r) = A(\rho) F(\rho)$, где $r = r_+ - (r_+ - r_-)\rho$ и $A = (\rho - 1)^{i\alpha} \rho^{i\beta} e^{i\gamma\rho}$, а параметры α, β, γ выражаются через введенные ранее безразмерные величины следующим образом:

$$\alpha = \frac{Jm - \omega r_-}{r_+ - r_-}, \; \beta = \frac{\omega r_+ - Jm}{r_+ - r_-}, \; \gamma = (r_+ - r_-)\, k, \; k^2 = \omega^2 - \mu^2.$$

Тогда уравнение на функцию $F(\rho)$ оказывается стандартной формой уравнения Гойна:

$$\left\{\rho(\rho - 1)\,\partial_\rho^2 + [c(\rho - 1) + d\rho + e\rho(\rho - 1)]\,\partial_\rho - a + b\rho\right\} F = 0,$$

с параметрами

$$a \equiv -\lambda - r_+(\omega + k)^2 + r_- r_+ k^2 + 2Jmk - i\omega + i(r_+ - r_-)\, k,$$

$$b \equiv -(r_+ - r_-)(\omega + k)^2 + i2(r_+ - r_-)\, k,$$

$$c \equiv 1 + i2\beta, \quad d \equiv 1 + i2\alpha, \quad e \equiv i2\gamma.$$

Решением такого уравнения согласно монографии Славянова и Лая будет линейная комбинация конфлюэнтных функций Гойна.

$$F(\rho) = A_1 HC(a, b, c, d, e; \rho) +$$
$$+ A_2 \rho^{1-c} HC(a + (1-c)(e-d), b + (1-c)e, 2-c, d, e; \rho).$$

Для радиальной функции имеем, соответственно,

$$R(r) = e^{ik(r_+ - r)} \left(\frac{r_- - r}{r_+ - r_-}\right)^{i\frac{Jm - \omega r_-}{r_+ - r_-}} \left\{A_1 \left(\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)^{i\frac{\omega r_+ - Jm}{r_+ - r_-}} \times\right.$$
$$\times HC\left(a, b, c, d, e; \frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right) + A_2 \left(\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)^{-i\frac{\omega r_+ - Jm}{r_+ - r_-}} \times$$
$$\left. \times HC\left(a + (1-c)(e-d), b + (1-c)e, 2-c, d, e; \frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)\right\}.$$

При $J = 0$ метрика Керра переходит в метрику Швацшильда. Следовательно, полученное решение должно переходить в решение радиального уравнения в метрике Шварцшильда. И действительно, при $J = 0$ получаем, что $r_- = 0$ и $r_+ = 1$, а для радиальной функции имеем

$$R(r) = e^{-ikr} \times \Big\{ A_1 (1-r)^{i\omega} HC\,(a, b, c, d, e; 1-r) +$$
$$A_2 (1-r)^{-i\omega} HC\,(a + (1-c)(e-d)\,, b + (1-c)\,e, 2-c, d, e; 1-r) \Big\}\,,$$

где параметры

$$a \equiv -\lambda - (\omega + k)^2 - i\,(\omega - k)\,, \quad b \equiv -(\omega + k)^2 + i2k$$

$$c = 1 + i2\omega, \quad d = 1, \quad e = i2k,$$

что с точностью до обозначений совпадает с результатом для черной дыры Шварцшильда, приведенным в работе Волобуев И.П., Кейзеров С.И., Рахметов Э.Р., ФИЗМАТ, 2023, том 1, № 2, с. 75–87.

Регулярные на бесконечности физические решения для метрики Керра можно получить с помощью принципа соответсвия, пользуясь тем, что при $J = 0$, физическое решение для метрики Керра должно переходить в физическое решение для метрики Шварцшильда. Это позволяет определить отношение коэффициентов A_1/A_2 в линейной комбинации функций Гойна, образующей физическое решение. Численный анализ показывает, что это отношение для черной дыры Керра очень слабо зависит от J. Отсюда для метрики Керра получаем вид физических решений для связанных состояний, когда энергия частицы меньше ее массы $\omega < \mu$, с мнимым $k = \pm i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$, в пределе при $J = 0$, преходящих в физические решения Шварцшильда:

$$R(r) = Ce^{ik(r_+ - r)} \left(\frac{r_- - r}{r_+ - r_-} \right)^{i \frac{Jm - \omega r_-}{r_+ - r_-}} \left\{ K_\pm \times \left(\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-} \right)^{i \frac{\omega r_+ - Jm}{r_+ - r_-}} \times \right.$$

$$\times HeunC \left(a, b, c, d, e; \frac{r_+ - r}{r_+ - r_-} \right) + \left(\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-} \right)^{-i \frac{\omega r_+ - Jm}{r_+ - r_-}} \times$$

$$\left. HeunC \left(a + (1 - c)(e - d), b + (1 - c) e, 2 - c, d, e; \frac{r_+ - r}{r_+ - r_-} \right) \right\}.$$

Где $K_\pm$ - такое же, как и в метрике Шварцшильда. Для состояний инфинитного движения, когда $\omega > \mu$, с вещественным $k = \pm\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$, в метрике Керра, также как и в метрике Шварцшильда, на константы A_1 и A_2 накладываются только условия нормировки.

Заключение

- В докладе представлены точные физические решения для скалярного поля в метрике сферически-симметричных черных дыр и аксиально-симметричных черных дыр Керра, выраженые в терминах конфлюэнтных функций Гойна. Для сферически-симметричных черных дыр получены нормировки решений.
- Для всех этих черных дыр показано, что состояния финитного и инфинитного движения принадлежат непрерывному спектру.
- Для сферечески-симметричных черных дыр найдено удвоение числа решений по сравнению со случаем плоского пространства Минковского, что является следствием нетривиальной топологии $R^2 \times S^2$ пространства-времени этих черных дыр.

Спасибо за внимание!

Доклад основан на результатах исследований в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 "Физика частиц и космология."